

Artículo de divulgación

Una actividad para promover el desarrollo del pensamiento variacional de profesores de bachillerato

A programme to encourage the growth of variational thinking among high school educators

Martha Cecilia Palafox Duarte ^{1,*} , Agustín Grijalva Monteverde ² ¹ Universidad de Sonora, Luis Encinas y Rosales SN, Colonia Centro, C.P. 83000, Hermosillo, Sonora;* Autor para correspondencia: martha.palafox@unison.mx**Recibido:**

22/01/2025

Aceptado:

24/04/2025

Publicado:

22/09/2025

RESUMEN

En los cursos de matemáticas es frecuente que se estudien conceptos y algoritmos presentados de forma descontextualizada y abstracta, lo cual no necesariamente permite que los estudiantes desarrollen las habilidades requeridas para usar las matemáticas en la resolución de problemas. Por ese motivo cada vez más se promueve que se ponga atención al llamado pensamiento matemático, una forma de razonar que da pie al uso de las matemáticas en la resolución de problemas tanto intra como extra matemáticos.

En investigaciones de matemática educativa se reportan algunas dificultades en la enseñanza del Cálculo, ya que en los cursos tradicionales se privilegian el formalismo y las técnicas, centrándose en los algoritmos o mecanizaciones que, aunque son necesarios, lo recomendable es que sea abordado mediante los problemas de variación y acumulación. La propuesta en este documento es el presentar una actividad que promueva el desarrollo del Pensamiento Variacional de los profesores de bachillerato, donde se privilegie el estudio de la variación en contextos reales.

Bajo este enfoque se presenta el diseño de una actividad con datos del Departamento de Investigación Científica y Tecnológica de la Universidad de Sonora (DICTUS) sobre el crecimiento de una microalga que sirve como alimento para crustáceos, en una granja acuícola en Bahía de Kino, Sonora. En esta actividad el estudio de la variación se enfoca en ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia? y, ¿Cuánto cambia?, que permite que emerjan elementos del Cálculo, tales como: las magnitudes involucradas en la variación, periodos crecientes y/o decrecientes, la razón de cambio, entre otros. Este tipo de actividades provee de grandes beneficios en el estudio de la variación en contextos reales de la comunidad y se encuentran acordes a lo establecido en el nuevo Marco Curricular Común (MCC) de la Educación Media Superior (EMS) de la Nueva Escuela Mexicana (NEM).

Palabras clave: Actividad; Profesores de bachillerato; Variación; Pensamiento Variacional; Contextos reales.

ABSTRACT

In mathematics courses, concepts and algorithms are often presented in a decontextualized and abstract manner, which doesn't necessarily allow students to develop the skills required



to use mathematics in problem-solving. For this reason, attention is increasingly being paid to so-called mathematical thinking, a form of reasoning that allows for the use of mathematics in solving both intra and extra mathematical problems.

In research on educational mathematics, some difficulties in teaching Calculus are reported, since traditional courses privilege formalism and techniques, focusing on algorithms or mechanizations that, although necessary, are recommended to be approached through problems of variation and accumulation. The proposal in this document is to present an activity that promotes the development of Variational Thinking in high school teachers, where the study of variation in real-life contexts is prioritized.

Under this approach, an activity design is presented using data from Departamento de Investigación Científica y Tecnológica of the Universidad de Sonora (DICTUS) on the growth of a microalgae that serves as food for crustaceans, in an aquaculture farm in Bahía de Kino, Sonora. In this activity, the study of variation focuses on What changes? How does it change? And how much does it change? which allows elements of Calculus to emerge, such as: the magnitudes involved in the variation, increasing and/or decreasing periods, the rate of change, among others. These types of activities provide great benefits in the study of variation in real community contexts and are in accordance with the new Common Curriculum Framework (MCC) of Upper Secondary Education (EMS) of the Nueva Escuela Mexicana (NEM)

Keywords: Activity; High school teachers; Variation; Variational Thinking; Real-life contexts.

INTRODUCCIÓN

El nacimiento del Cálculo se inició con el estudio del movimiento de los astros, evolucionando hasta llegar a la definición de función de una manera formal y abstracta, privilegiando la relación conjuntista y estática de la misma, sin motivar el estudio dinámico de la relación entre magnitudes variables. Se puede observar que las propuestas de enseñanza siguen, con frecuencia, dos caminos principales, que en ocasiones se entremezclan entre sí; o se centran en las mecanizaciones y algoritmos, mientras que en otras se centran en la parte formal o abstracta a través de la demostración de los teoremas. En lugar de enfocarse en el estudio de la variación y a “las ideas dinámicas, siendo las verdaderas gestoras de los trabajos de los padres del Cálculo” (Mendoza & Cabezas, 2017, pág. 48).

Sin embargo, gran parte de los cursos tradicionales de Cálculo no fomentan el estudio de la variación, a pesar de que debiera ser la parte central en la que se sostenga la enseñanza de esta materia. En cambio, se imparte la asignatura de manera abstracta, enfocándose en algoritmos y mecanizaciones, sin darle importancia al carácter dinámico y al pensamiento variacional que se

debe tener al momento de analizar las situaciones reales y las relaciones cuantitativas entre las magnitudes variables involucradas. Estas ideas se avalan al mencionar que:

Los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos del Cálculo, pero el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. “Se fomenta el desarrollo de estrategias y conocimientos procedimentales y memorísticos que, aunque son necesarios, no dejan ver el carácter variacional del Cálculo, y no propician la construcción de una concepción rica en significados. Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarias para la comprensión de las ideas del cálculo” (Caballero & Cantoral, 2013, pág. 1585).

Fonseca y Alfaro (2018) mencionan que “una de las posibles causas del fracaso en el aprendizaje de esta disciplina es que su enseñanza es muy procedimental y basada en aspectos muy formales, que el énfasis se da al manejo algebraico, más que a lo visual y lo geométrico”.



Asimismo, se señala que “el aprendizaje de esta disciplina se transforma en la manipulación simbólica-algebraica, siendo este el objetivo fundamental y desapareciendo el constructo de los conceptos básicos del Cálculo” (Delgado, 2009, pág. 61). De manera similar, Díaz (2009) afirma que en la enseñanza de los cursos de Cálculo prevalece una tendencia a centrarse en el desarrollo de habilidades en los aspectos mecánicos, así como en la memorización de algoritmos.

En México se está implementando un nuevo modelo educativo llamado la Nueva Escuela Mexicana NEM, que trae consigo un cambio en el Marco Curricular Común MCC en Educación Media Superior EMS, donde se dejan de lado el estudio de asignaturas aisladas para dar paso al estudio de situaciones y problemas de la comunidad, del país y del mundo. En el área de matemáticas se han definido para los primeros tres semestres el estudio de recursos sociocognitivos, llamados pensamientos matemáticos. Para el tercer semestre se lleva Pensamiento Matemático 3, que corresponde al Pensamiento Variacional, que promueve lo descrito en este trabajo. Sin embargo, en el MCC no se define formalmente el Pensamiento Variacional, por lo que es necesario encontrar una definición que se adecue a los elementos del MCC.

DESARROLLO

Se puede observar cómo la enseñanza del Cálculo se presenta de forma estática cuando su esencia es el estudio de la variación (la rapidez del cambio y los procesos de acumulación); dando prioridad a los algoritmos, fórmulas, técnicas y elementos formales o abstractos sin dar un sentido dinámico que permitan potenciar su utilidad en diversos contextos. En el MCC del NEM se promueve el estudio de la variación y el cambio (SEMS, 2023) mediante el Pensamiento Variacional, lo que significa un cambio radical en el estudio del Cálculo, lo que trae consigo la capacitación docente que promueva el desarrollo del PV en profesores de bachillerato.

En esta propuesta se trabaja con el Pensamiento Variacional en los cursos de Cálculo, ya que permite el estudio de la variación por medio de la covariación de las magnitudes. Tal como se asevera:

“El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2002, pág. 63).

Vasco manifiesta que, existen varios momentos o etapas para poder desarrollar el pensamiento variacional: la primera instancia es la captación de lo que cambia, de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como el crecimiento de una planta en determinado momento, consumo de energía eléctrica o de agua según el volumen utilizado, entre otros.

En un segundo momento se tiene la producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar “modelos mentales”; luego tiene un momento de echar a andar o “correr” esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y si es el caso, tiene también el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo (Vasco, 2002).

Es posible concluir que este proceso consta de cinco fases:

- 1) Identificación de magnitudes variables y patrones,
- 2) Creación de modelos mentales,
- 3) Implementar el modelo y observar resultados,
- 4) Verificar el modelo para comparar con el proceso que se desea modelar y
- 5) Mejorar el modelo o descartarlo.

Se puede observar cómo se intenta vincular lo que se está pensando de forma dinámica en la mente, y que esto se asocie a la covariación que se presenta con las magnitudes variables en la realidad. Es decir, lo que se tiene en la mente de forma no ostensiva se lleve a la realidad con representaciones o imágenes de manera ostensiva (materiales) y que se correspondan con el proceso que se desea analizar. En otras palabras, “el

objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo” (Vasco, 2002, pág. 63).

La actividad propuesta se diseña con datos de una investigación del DICTUS sobre el crecimiento de una microalga que sirve como alimento para crustáceos, en una granja acuícola en Bahía de Kino Sonora. En este trabajo se utilizarán algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico como: sistemas de prácticas, configuraciones ontosemióticas, configuraciones y trayectorias didácticas, y criterios de idoneidad didáctica.

Sistema de prácticas

Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Puede ser personal o institucional, entendiéndose que una institución está constituida por las personas involucradas en la resolución de una misma clase de situaciones problemas.

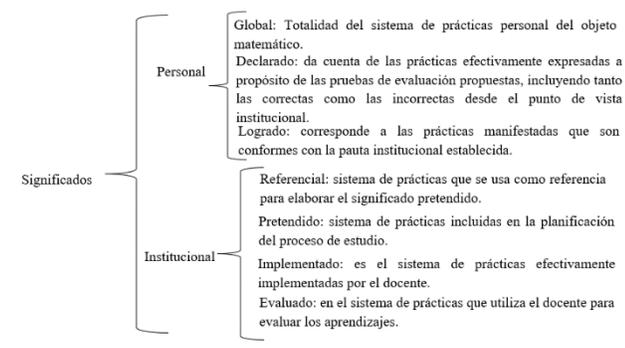


Figura 1. Figura 1 Tipos de significados según EOS, adaptado de (Godino, Batanero, & Font, 2008).

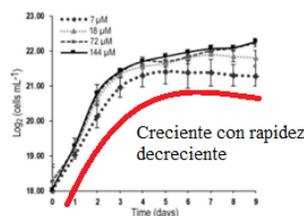
El sistema de prácticas que realiza una persona conformaría el significado personal, el cual puede ser: global, declarado y logrado. El significado institucional es el compartido en el seno de una institución y son el referencial, pretendido, implementado y evaluado. En la Figura 1 se definen los diferentes tipos de significados.

A continuación, en la Tabla 1 se presenta el sistema de prácticas esperado en el diseño de la Actividad de

Microalgas *Chaetoceros muelleri*, en la que se analizan tratamientos con cuatro diferentes concentraciones de fósforo con el objetivo de analizar su crecimiento y determinar el mejor.

Tabla 1. Sistema de prácticas de actividad microalgas.

Sistema de Prácticas
<p>Se utiliza como significado institucional de referencia la definición de Vasco (2002) sobre el PV</p> <ol style="list-style-type: none"> ¿Qué cambia? <ul style="list-style-type: none"> Se identifican las magnitudes involucradas en el contexto. Determinar las magnitudes variables y constantes <p>En el ejemplo del crecimiento de la microalga <i>Chaetoceros muelleri</i>, algunas magnitudes involucradas son la cantidad de fósforo (constante para cada tratamiento), diversos nutrientes como nitratos, minerales, vitaminas y oligoelementos (constantes), el tiempo (variable), la cantidad de células por mililitro (variable).</p> ¿Cómo cambia? <ul style="list-style-type: none"> Analizar la relación entre dos variables (Covariación). El crecimiento es la covariación entre la cantidad de células y el tiempo transcurrido. Determinar el comportamiento creciente, decreciente o constante. ¿Cuánto está cambiando? <ul style="list-style-type: none"> Determinar el comportamiento diario y en determinado periodo de tiempo. <i>cantidad de alga de un día determinado – cantidad de alga el día anterior</i> Analizar la rapidez con la que está cambiando. La razón media de cambio $\frac{C_f - C_i}{t_f - t_i}$ Tomar decisiones. Se puede observar que no hubo crecimiento significativo con alguno de los cuatro tratamientos de fósforo, pues su comportamiento fue similar con cada uno de estos.



Objetos y procesos matemáticos

En el EOS se considera que los objetos matemáticos están presentes en los sistemas de prácticas matemáticas, estos pueden ser intervinientes o emergentes.

Objetos matemáticos primarios

Los objetos matemáticos intervinientes son los que se emplean al realizar las prácticas matemáticas; mientras que los objetos emergentes de los sistemas de prácticas son los que surgen al resolver y comunicar los resultados de alguna situación problema. En ambas situaciones, intervinientes o emergente, se pueden considerar a los objetos matemáticos primarios como las definiciones, proposiciones, ejercicios, procedimientos, entre otros.

- Objetos Matemáticos Primarios
- **Situaciones-problemas** (tareas, ejercicios, problemas, intra o extra-matemáticos)
 - **Elementos Lingüísticos** (términos, expresiones, notaciones, gráficas, entre otros) en distintos registros.
 - **Procedimientos** (algoritmos, operaciones, cálculos)
 - **Proposiciones** (enunciados sobre conceptos)
 - **Argumentos** (validación o explicación de procedimientos)
 - **Conceptos-definiciones**

Figura 2. Objetos primarios del EOS.

Al realizar y evaluar una práctica matemática se ponen en juego ciertos conocimientos que forman un conjunto de componentes, como en una situación-problema se observa el uso de lenguajes, verbales y simbólicos, que son la parte ostensiva de los conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias; todo esto se articula en la configuración presentada en la Figura 3.

Procesos matemáticos

En los procesos de resolución de problemas o situaciones problema, además de la emergencia de nuevos objetos matemáticos primarios, se emplean procesos matemáticos diversos. Los procesos matemáticos que se reconocen en el EOS son los siguientes: problematización, definición, enunciación, representación, argumentación, idealización, generalización, entre otros (Figura 4).

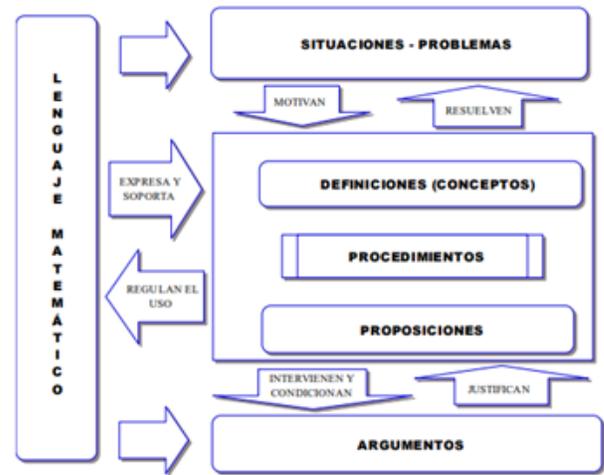


Figura 3. Configuración de objetos primarios. Tomada de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 7).

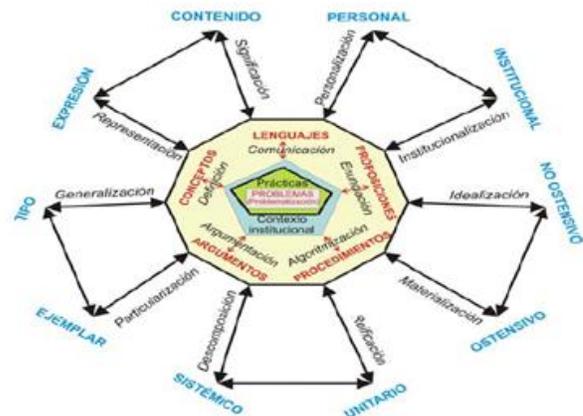
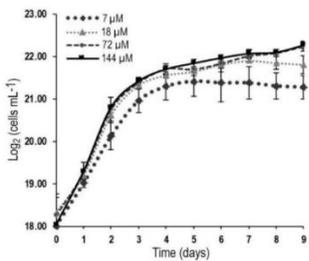
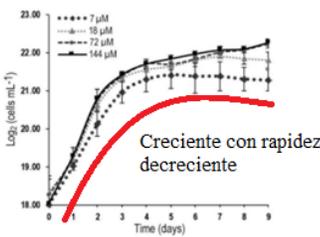


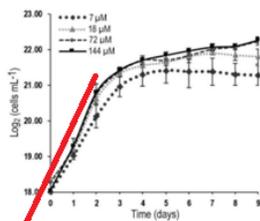
Figura 4. Prácticas, objetos y procesos matemáticos. Tomado de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 10).

En la Tabla 2 se ejemplifican algunos de ellos, mediante la actividad de microalgas *Chaetoceros muelleri*, su uso y aplicación constituye un factor de primordial importancia en la realización de actividades matemáticas. En tal sentido, en los diseños de actividades didácticas es pertinente identificar los procesos que se consideran primordiales para el aprendizaje, ya que estos fomentan el uso de las matemáticas teóricas como herramientas para la resolución de problemas.

Tabla 2. Procesos matemáticos de actividad de microalgas.

Procesos Matemáticos	Ejemplificación
Problematización	Utilizar elementos del pensamiento variacional en el crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri a diferentes concentraciones de fósforo (control, exceso y dos limitantes) para determinar la mejor opción de los cuatro tratamientos.
	
Definición	“... el objeto del pensamiento variacional es el análisis de la covariación entre cantidades de magnitudes, principalmente las variaciones en el tiempo” (Vasco 2002, pág. 63)
Enunciación	Se analiza la relación entre cantidades de magnitudes variables y cómo afecta el cambio de una respecto a la otra.
Comunicación	La curva está creciendo a medida que pasa el tiempo, primero rápidamente y después permanece constante.
Algoritmización	La razón media de cambio $\frac{C_f - C_i}{t_f - t_i}$
Argumentación	Para analizar el comportamiento se tienen que identificar las magnitudes variables y la manera como covarían entre sí, es decir, de manera general se observa que a medida que pasa el tiempo, la cantidad de células por mililitro aumenta. Sin embargo, al inicio se observa una mayor rapidez de crecimiento, luego es más lento y al final parece un ligero decrecimiento.
Institucionalización	Se analiza la covariación entre cantidades de magnitudes variables para determinar qué cambia, cómo cambia y cuánto está cambiando.
Personalización	
Generalización	Se identifican las magnitudes (constantes y variables) involucradas, se analiza el comportamiento creciente, decreciente o constante, la covariación entre magnitudes variables y la rapidez de cambio.
Particularización	En el ejemplo del crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri, algunas magnitudes involucradas son la cantidad de fósforo (constante para cada tratamiento), diversos nutrientes (constantes), el tiempo (variable), la cantidad de células por mililitro (variable). El crecimiento es la covariación entre la cantidad de células y el tiempo transcurrido.
Descomposición	En el estudio de $y = mx + b$ se pone énfasis en la pendiente m como la razón de cambio entre un desplazamiento vertical respecto a un desplazamiento horizontal, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pues es uno de sus parámetros.
Reificación/síntesis	Al analizar el comportamiento de las curvas de crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri se utiliza la pendiente como un proceso unitario.
Materialización	Una función es creciente en x si $f'(x) > 0$ y decreciente si $f'(x) < 0$.

Idealización



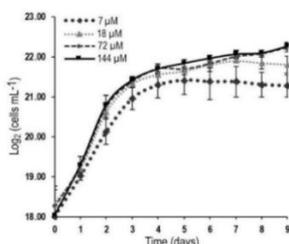
Idealizar una recta

En los primeros dos días se puede idealizar como una recta lo que nos lleva a observar un crecimiento con rapidez constante.

Significación

A medida que aumenta la variable independiente $x, x_1 < x_2$; aumenta la variable dependiente $y, f(x_1) < f(x_2)$.

Representación



Configuraciones Ontosemióticas

Al relacionarse entre sí estos objetos primarios forman configuraciones, que pueden ser socio-epistémicas al tratarse de redes de objetos institucionales o cognitivas cuando son redes de objetos personales. Continuando con el ejemplo previo, donde se aborda la situación-problema de analizar por medio del pensamiento variacional, las distintas curvas del crecimiento de la microalga *Chaetoceros muelleri* a diferentes concentraciones de fósforo (control, exceso y dos limitantes), en la Figura 5 se presenta la configuración ontosemiótica.

Criterios de Idoneidad Didáctica

Para el diseño de la actividad de la microalga *Chaetoceros Muelleri* se consideraron los criterios de idoneidad didáctica: epistémica, cognitiva, emocional, interaccional, ecológica y mediacional; Para esto, se creó una herramienta donde se exponen los elementos esenciales para el cumplimiento de cada uno de los criterios de idoneidad, como se presentan en la siguiente Tabla 3.

Este instrumento de elaboración propia (Tabla 3) puede ser utilizada para el diseño de cualquier actividad didáctica.

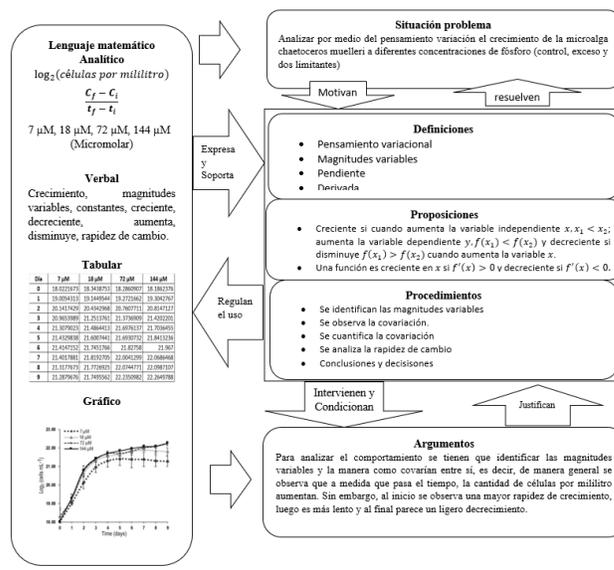


Figura 5. Configuración ontosemiótica de la actividad de la microalga.



Tabla 3. Sistema de prácticas de actividad microalgas.

Criterios	Elementos de diseño
Epistémica	Tema matemático por abordar, definir los objetos matemáticos que intervienen y los que emergen de la práctica matemática.
Cognitiva	Que las actividades se encuentren dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. Con base en conocimientos previos.
Interaccional	<ul style="list-style-type: none"> • Definir interacciones entre los participantes. • Dificultades que se puedan presentar y cómo resolverlas
Mediacional	Recursos disponibles: <ul style="list-style-type: none"> • Tiempo • Materiales • Recursos tecnológicos
Afectiva	Situaciones del pensamiento variacional: <ul style="list-style-type: none"> • Extramatemáticos <ul style="list-style-type: none"> ○ En contexto de su entorno local, nacional, global. ○ Problemas de su comunidad o entorno. • Intramatemáticos
Ecológica	<ul style="list-style-type: none"> • Que se encuentren con características y elementos enmarcados en el marco Curricular Común de la EMS. • Transversalidad con otras asignaturas

CONCLUSIONES

El Cálculo estudia el cambio y la variación, el análisis y modelación de diversos fenómenos y el estudio a través de las relaciones de las magnitudes variables. Los cursos tradicionales de esta asignatura no promueven la esencia dinámica de los procesos de cambio, se centran en algoritmos y mecanizaciones, tratando de comprender los objetos básicos de este, mediante el estudio de las funciones de manera estática con la definición formal conjuntista a través de parejas ordenadas. Se propone que en los cursos se incluya la realización de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento

variacional, centrando la atención en el estudio de las relaciones entre magnitudes variables.

Literatura citada

- Caballero, P. M., & Cantoral, U. R. (2013). El Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional entre Profesores de Bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol 26, págs. 1585-1593.
- Cuevas, V. C., & Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. *El Cálculo y su Enseñanza, Cinvestav del Instituto Politécnico*, 45-60.
- Delgado, P. M. (2009). Matemática visual: simulaciones relativas al teorema fundamental del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, Año 1. Vol.1 No1., págs. 61-74.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*.
- Lovio Frago, J. P., Hayano Kanashiro, C., & López Elías, J. A. (2019). Effect of different phosphorus concentrations on growth and biochemical composition of *Chaetoceros muelleri*. *Latin American Journal of Aquatic Research*, 47(2): 361-366.
- Mendoza, M., & Cabezas, C. (2017). Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial. *Revista Portal de la Ciencia*, No.13, págs. 45-65.
- Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Memorias del Congreso Internacional de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*, 61-70.

Aviso legal/Nota del editor: Las declaraciones, opiniones y datos contenidos en todas las publicaciones son exclusivamente de los autores y colaboradores, y no de Agraria ni de sus editores. Agraria y sus editores no se responsabilizan de ningún daño a personas o bienes que resulte de las ideas, métodos, instrucciones o productos mencionados en el contenido.

